

请在所附答题纸上空出密封位置。并填写试卷序号、班级、学号和姓名

2024 – 2025 学年第 2 学期
安徽大学《高等代数 (下)》期末模拟试卷 A 卷
(闭卷笔试 120 分钟)

题号	一	二	三	总分
分数				

一、选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

得分	
----	--

- m, n 是大于 1 的整数, 则 $x^{3m} + x^{3n}$ 除以 $x^2 + x + 1$ 后的余式为 ().
(A) $x + 1$; (B) 0; (C) 1; (D) 2;
- 若矩阵 A 只和自己相似, 则 ().
(A) A 必为单位矩阵
(B) A 必为零矩阵
(C) A 必为数量矩阵
(D) A 为任意对角矩阵
- 矩阵 A 为可逆矩阵的充要条件是 ().
(A) 矩阵 A 的不变因子全不为零;
(B) 矩阵 A 的行列式因子全不为零;
(C) 矩阵 A 的最后一个不变因子有非零常数项;
(D) 矩阵 A 至少有一个不变因子有非零常数项.
- 若 A 是十阶非零矩阵且满足 $A^2 = 0$, 则 A 的 Jordan 标准型中 Jordan 块的最大阶数应该为 ().
(A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5.
- A 是正交矩阵, 下列矩阵不一定是正交矩阵的是 ().
(A) A' (B) A^* (C) $-A$ (D) $P^{-1}AP$, P 是同阶可逆矩阵

二、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

得分	
----	--

- 设 V 是由数域 $\mathbb{F}$ 上的二阶矩阵全体组成的向量空间, 定义 V 上的线性变换 φ 如下:
 $\varphi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 φ 的秩和零度分别是 _____.

- 设 A 是三阶矩阵 1, 2, 3 是它的特征值, 则 $2A^2A^* + I_3$ 的特征值是_____.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e \end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 则 $a =$ _____, $e =$ _____.

- n 阶实对称矩阵按合同分类, 共有 _____ 类.

- 已知矩阵 A 的不变因子组为 $1, \dots, 1, \lambda, \lambda^2(\lambda - 1), \lambda^2(\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 1)$, 则在复数域内 A 的初等因子组为 _____.

三、解答题 (每小题 12 分, 共 60 分, 需给出详细解答过程. 禁止使用课本习题的结论或其他参考书中的结论.)

得分	
----	--

- 证明: $x^8 + 1$ 在有理数域上不可约.

- 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 若存在 n 阶实矩阵 B , 使 $AB + B'A$ 是正定阵, 求证: A 为非异阵.

13. 设 $n(n > 1)$ 阶矩阵 A 的秩为 1, 试求 A 的 Jordan 标准形.

15. 设 σ 为 n 维欧氏空间 V 上的线性变换, 且在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A . 证明: σ 为对称变换的充要条件是 $A^T G = GA$, 其中 $G = ((\alpha_i, \alpha_j))$ 为基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的度量矩阵.

14. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ -3 & -3 & y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x, y, z 的值;

(2) 求一个满足 $P^{-1}AP = B$ 的可逆矩阵 P .